

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ COMO FERRAMENTA EDUCACIONAL

Marcus Pizzetti Rosa (1), Daiane dos Santos da Silva Godinho (2)

UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense
(1) qnuit@hotmail.com, (2) dss@unescc.net

RESUMO

Devido à dificuldade que o estudante de engenharia civil apresenta para visualizar o comportamento das estruturas, sob a influência de qualquer tipo de carregamento e devido a tecnologia ser um meio de fortalecer o aprendizado, desenvolveu-se um software para cálculo de pórticos espaciais, pelo método da rigidez. Este software denominado de UNI3D, possibilita que o usuário insira todas as informações da estrutura em um plano tridimensional, que facilita a sua visualização e permite a simulação das reações de carregamento. Além de apresentar os deslocamentos e as reações de apoio, ele também exibe todas as etapas que compõem o método da rigidez, através da geração da matriz de rigidez de cada barra, matriz de rotação, matriz de rigidez ajustada, matriz global, entre outros relatórios, que possibilitam que o aluno não somente analise os resultados, mas também compreenda o funcionamento deste método. Como os pórticos espaciais são as estruturas mais comuns na engenharia, este sistema permite ao usuário a simulação de um número infinito de situações reais, sem a necessidade da utilização de softwares robustos e que exigem um grande conhecimento de seu funcionamento. Para validar seus resultados e funcionamento, um pórtico espacial foi lançado neste software e teve suas resultantes analisadas em relação ao software comercial SAP2000, que utiliza o método dos elementos finitos como meio de cálculo e software educacional PORTICO3D, que também é baseado no método da rigidez, após todas análises, verificou-se que os resultados condiziam com os demais sistemas.

Palavras-chave: Método dos deslocamentos. Método da Rigidez. Pórtico Espacial. Software didático.

1. INTRODUÇÃO

Devido à dificuldade em visualizar o comportamento da estrutura sob a influência de qualquer tipo de carregamento, busca-se cada vez mais desenvolver através da tecnologia, formas de reproduzi-los, possibilitando com isso um melhor entendimento por parte do estudante.

De acordo com Sancho (et al, 2006, p. 88) “O uso das novas tecnologias é visto agora como um meio para fortalecer um estilo mais pessoal de aprender em que os estudantes estejam ativamente envolvidos na construção do conhecimento [...]”, desta forma, cada vez mais a computação é vista como uma grande ferramenta de auxílio ao aprendizado.

(SANCHO, et al, 2006, p. 148), ainda afirma, que “[...] uma variedade de usos ou versões em diferentes formatos da mesma informação: sonora, visual, ampliada, tátil, etc., quais permite torná-la acessível aos estudantes com diferentes necessidades ou preferências”, sinalizando que o aprendizado não é igual para todas as pessoas, isto é, existe uma grande dificuldade para os alunos entenderem o conteúdo, quando o professor se utiliza de um único método de apresentação.

Com base nesta informação, buscou-se através do presente trabalho desenvolver um software didático, de fácil manuseio que possibilite a simulação de pórticos espaciais, permitindo analisar as reações e os deslocamentos. De acordo com Martha (2010, p. 3), “a análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração com relação a estrutura que está sendo analisada”, sendo elas estrutura real, modelo estrutural, modelo discreto e modelo computacional.

Para a criação do software, desenvolve-se um modelo estrutural, com dimensões geométricas, condições de suporte, ligações entre os elementos (vigas, pilares, etc.) e identificação dos materiais utilizados. O modelo que foi analisado é o Pórtico espacial, que são estruturas reticuladas tridimensionais, formadas por elementos lineares, nos quais são desenvolvidos os seis esforços seccionais (força normal, duas forças cortantes, dois momentos e um momento de torção).

Após a conclusão dos níveis anteriores, pôde-se então criar o modelo discreto, que é a conversão do modelo estrutural em um modelo matemático, capaz de analisar os diversos parâmetros e variáveis para identificar o comportamento.

O software recebeu o nome de UNI3D, que faz referência a união tridimensional das barras e foi constituído para proporcionar aos professores e alunos uma ferramenta gráfica que possibilite em tempo real verificar os deslocamentos, reações de apoio, composição da matriz de rigidez da barra, matriz global da estrutura, matriz de rotação e com isso fundamentar as informações obtidas em sala de aula facilitando o entendimento da disciplina.

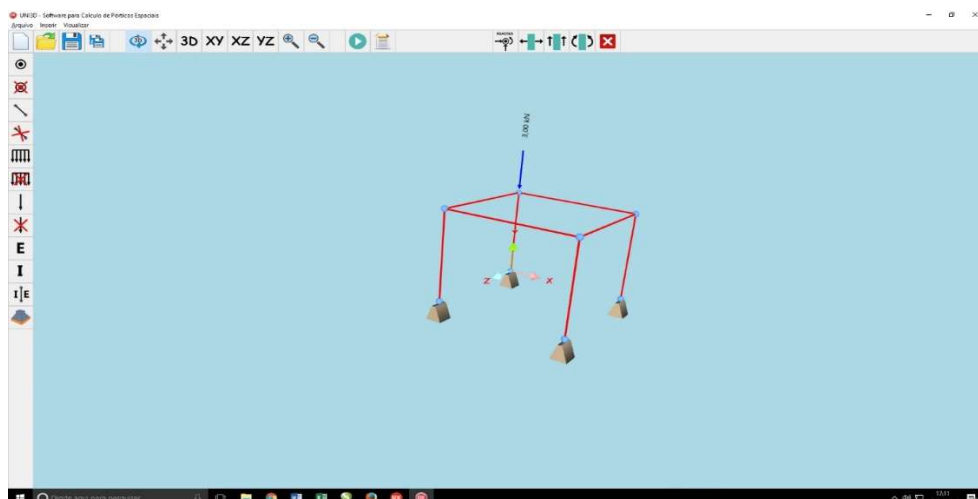
2. MATERIAIS E MÉTODOS

O presente trabalho se baseou na utilização de um método de cálculo estrutural, denominado método dos deslocamentos ou método da rigidez. Nele determinou-se um sistema de equações de equilíbrio, em que a matriz dos coeficientes é chamada de *matriz de rigidez* e o vetor dos termos independentes *vetor das forças nodais* (SORIANO, 2005). A partir da utilização do método empregado, foi desenvolvido um algoritmo capaz de criar uma reprodução das deformações e ações provocadas nos pórticos espaciais, com o intuito especificamente didático não podendo ser utilizado para fins comerciais.

O aplicativo foi desenvolvido através da utilização da linguagem de programação Delphi, que de acordo com Leão (2001) é a mais poderosa biblioteca de componentes object pascal, e que atua no mercado desde 1994 quando saiu sua primeira versão para aplicações Windows. Além de todos os recursos citados, conta também com uma tecnologia denominada FIREMONKEY, que possibilita o trabalho com gráficos HD, 3d, efeitos de imagem e animações.

Para o desenvolvimento do software foi necessário o entendimento e aplicação de alguns conceitos essenciais para sua elaboração. Conforme pode ser visualizado na Figura 01, o sistema tem uma apresentação que possibilita que o usuário insira uma estrutura e obtenha suas resultantes.

Figura 01 – Tela de apresentação software UNI3D



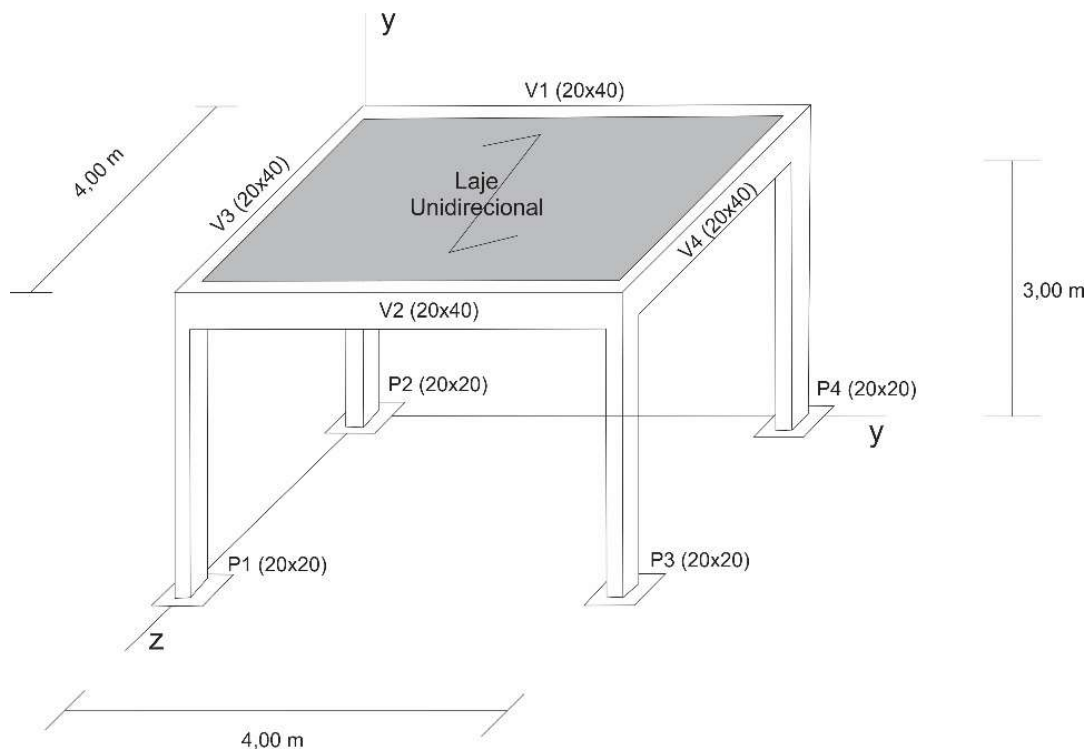
Fonte: Do Autor, 2017

2.1 MÉTODO DA RIGIDEZ

O método da rigidez, também conhecido como método dos deslocamentos busca determinar os deslocamentos nodais da estrutura, tratando individualmente cada barra. Todas as ações são convertidas em ações de extremidade e posteriormente unidas em uma única matriz, através do princípio da superposição. Para (MARTHA, 2010, p. 299) o método consiste em “Somar uma série de soluções básicas (chamadas de casos básicos) que satisfazem as condições de compatibilidade, mas não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, para, na superposição, restabelecer as condições de equilíbrio”.

A estrutura em questão que foi analisada pelo software se refere a um pórtico espacial composto de quatro vigas V1, V2, V3 e V4, com seção de (0,20 m x 0,40 m), que se apoiam em quatro pilares de P1, P2, P3 e P4, com seção (0,20 m x 0,20 m) e com uma laje pré-fabricada, que se apoia nas vigas V1 e V2 como mostra a Figura 02.

Figura 02 –Estrutura do pórtico espacial a ser analisada



Fonte: Do Autor, 2017

2.2 CONSTITUIÇÃO DAS SEÇÕES, MATERIAIS E DEFORMAÇÕES

O modelo matemático do comportamento dos materiais, em nível macroscópico, é expresso por um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deformações, chamadas de leis constitutivas (MARTHA, 2010). Através dessas leis, define-se entre elástico e plástico. Como o método da rigidez tem como objetivo analisar o comportamento da estrutura, todo material é considerado como linearmente elástico, podendo deformar de acordo com a tensão submetida.

A deformação é determinada através de um diagrama de tensão-deformação, utilizando a relação conhecida como *lei de Hooke*, conforme descreve (BEER et al., 2008), em que a tensão é diretamente proporcional a deformação específica, como se apresenta na Equação (2.1).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

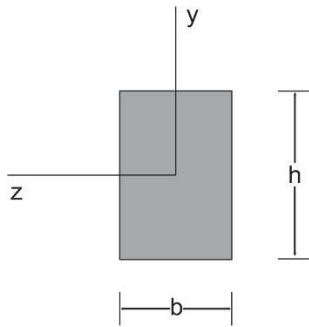
Sendo:

σ – Tensão aplicada - Pascal [N/m²];

E – Módulo de elasticidade do material [N/m²];

ε – Deformação específica, (adimensional).

Para a determinação das deformações foi necessário a inserção das características da seção e do material utilizado. Como as vigas e pilares do pórtico são quadradas, utilizou-se das equações compostas na Equação (2.2), para a determinação da área, torção, momentos de inercia em y e z. Quanto ao material utilizado, foi definido o concreto de $F_{ck} = 20$ MPa, que possibilitou a determinação do módulo de elasticidade e módulo de elasticidade transversal, através da Equação (2.3).



$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$Torção = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad (2.2)$$

$$\beta \approx \frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)$$

$$E = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{F_{ck}} = 21287000 \frac{kN}{m^2} \quad (2.3)$$

$$G = 0,4 \cdot E = 8514800 \text{ kN/m}^2$$

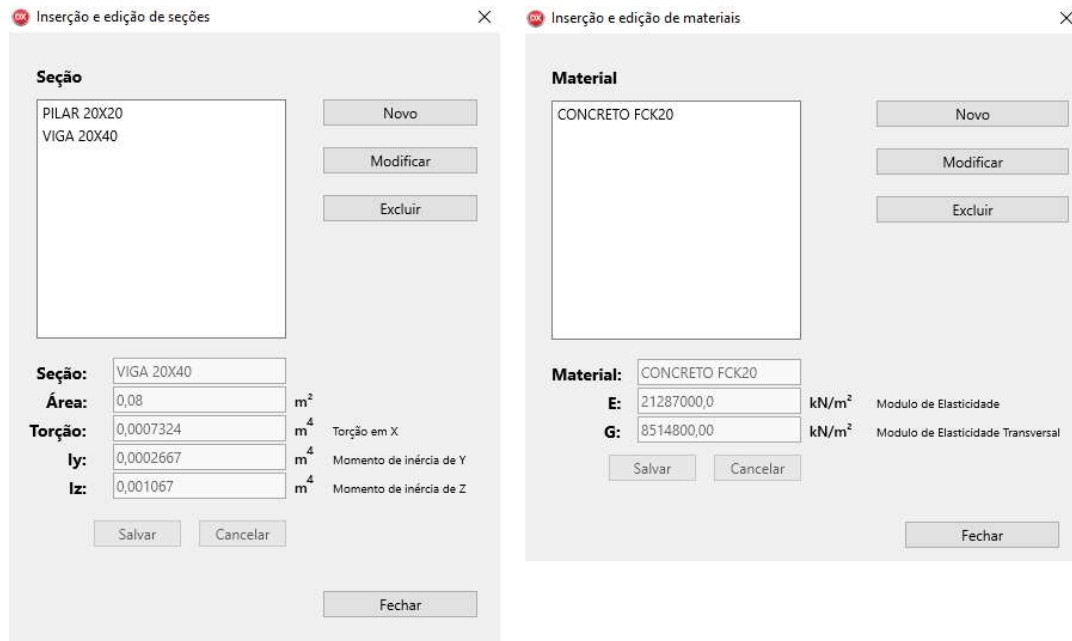
Após o cálculo das seções de cada barra, obteve-se os valores estabelecidos na tabela 01, que foram inseridos no sistema junto com as características do material conforme Figura 03.

Tabela 01 – Características dos pilares e vigas

Barra	I_y (10^{-5} m^4)	I_z (10^{-5} m^4)	J (10^{-5} m^4)	Área (m^2)
Pilar 1	0,0001333	0,0001333	0,0002253	0,04
Pilar 2	0,0001333	0,0001333	0,0002253	0,04
Pilar 3	0,0001333	0,0001333	0,0002253	0,04
Pilar 4	0,0001333	0,0001333	0,0002253	0,04
Viga 1	0,0002667	0,001067	0,0007324	0,08
Viga 2	0,0002667	0,001067	0,0007324	0,08
Viga 3	0,0002667	0,001067	0,0007324	0,08
Viga 4	0,0002667	0,001067	0,0007324	0,08

Fonte: Do Autor, 2017

Figura 03 – Inserção e edição das seções/materiais - software UNI3D



Fonte: Do Autor, 2017

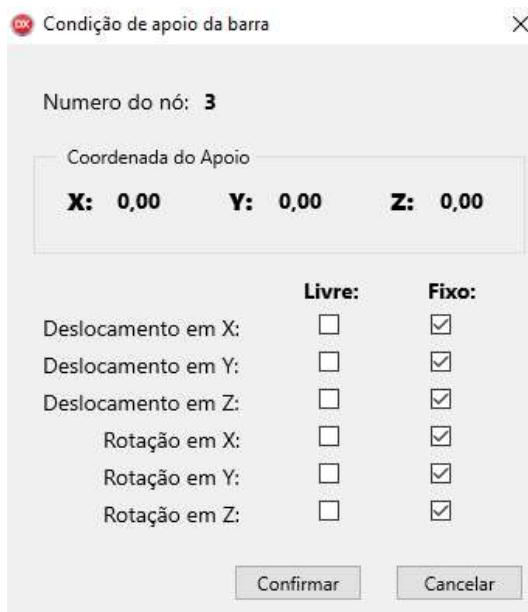
2.3 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

A garantia das condições de equilíbrio é extremamente importante para a análise de qualquer estrutura. De acordo com (MARTHA, 2010, p 85.):

A essência da análise de modelos estruturais está no atendimento a condições de equilíbrio, a condições de continuidade geométrica interna e externa (respeitando restrições de apoio) e a condições impostas pela idealização do comportamento de materiais.

Para garantir que a estrutura se mantenha de maneira estável é necessário anular as forças e momentos aplicados sobre o pórtico espacial, através das reações de apoio que são de igual intensidade e contrária ao carregamento aplicado. Através do cadastro de condições de apoio da barra, ilustrado na Figura 04, determinou-se os graus de liberdade nos nós da estrutura, sendo que os quatro pilares em seu nó inferior, foram selecionados como apoios engastados, isto é, sem nenhum tipo de deslocamento ou rotação.

Figura 04 – Inserção das condições de apoio da barra - software UNI3D



	Livre:	Fixo:
Deslocamento em X:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Deslocamento em Y:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Deslocamento em Z:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rotação em X:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rotação em Y:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rotação em Z:	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Fonte: Do Autor, 2017

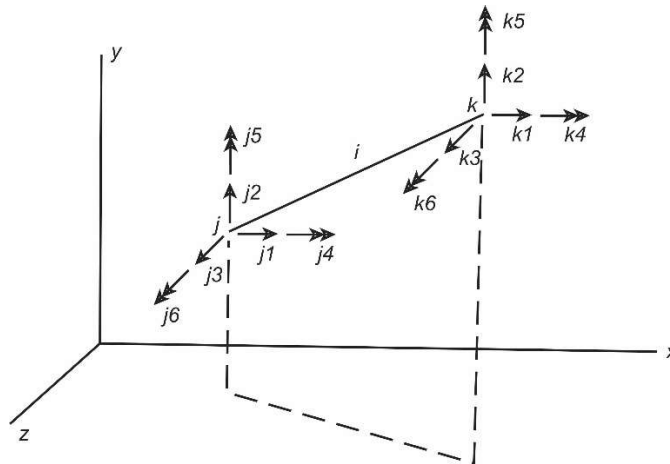
2.4. ESTUDO DA BARRA

Para facilitar o cálculo e estudo dos deslocamentos e esforços, desenvolveu-se uma análise individual de cada barra, que segundo (SORIANO, 2005):

É mais prático prescrever deslocamento unitário em cada extremidade de barra considerada separadamente como bi engastada, e superpor os correspondentes efeitos, para obter a configuração resultante de deslocamento nodal unitário prescrito na estrutura.

Conforme visualiza-se na Figura 05, quando a barra de um pórtico espacial é isolada, consegue-se identificar os graus de liberdade ou de deslocamento de um determinado nó. Como o pórtico espacial possui membros rigidamente ligados e orientados numa forma geral no espaço, obtêm-se cargas em todos os eixos de dimensão (x, y, z), resultando desta forma em três componentes em translação e mais três em rotação, para cada nó.

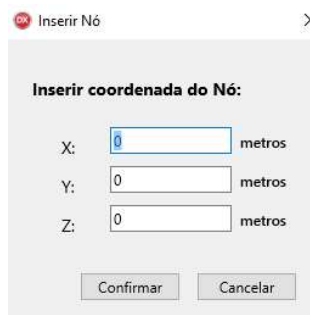
Figura 05 - Graus de liberdade da barra de pórtico espacial.



Fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p.277

Para a composição das barras inseriu-se os nós nas coordenadas (x, y e z), como mostra a Figura 06, estabelecendo assim sua posição no plano com a união de dois nós, após a ativação da opção de criação de barras, o software conseguiu desenhar de forma tridimensional este membro, estabelecendo com isso seu tamanho e coordenadas.

Figura 06 – Inserção dos nós - software UNI3D



Fonte: Do Autor, 2017

Na tabela 02 estão representadas as coordenadas de cada um dos oitos nós da estrutura, e na tabela 03 a ligação dos nós que possibilitou a criação de cada uma das barras, constituídos como pilares e viga.

Tabela 02 – Coordenadas dos nós

NÓ	X	Y	Z
1	0	0	0
2	0	3	0
3	0	0	4
4	0	3	4
5	4	0	0
6	4	3	0
7	4	0	4
8	4	3	4

Fonte: Do Autor, 2017

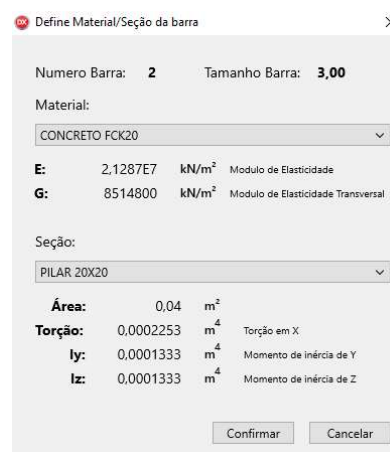
Tabela 03 – Comprimento e ligação das barras

Barra	Nó Inicial	Nó Final	Comprimento (m)
Pilar 1	1	2	3,00
Pilar 2	3	4	3,00
Pilar 3	5	6	3,00
Pilar 4	7	8	3,00
Viga 1	2	4	4,00
Viga 2	2	6	4,00
Viga 3	4	8	4,00
Viga 4	6	8	4,00

Fonte: Do Autor, 2017

Depois que todos os nós e barras (pilares/vigas) foram incluídas, estabeleceu-se a ligação deste membro com as suas características, como mostra a Figura 07.

Figura 07 – Definição dos materiais e seção da barra - software UNI3D



Fonte: Do Autor, 2017

A Figura 08 apresenta a matriz de rigidez padrão de uma barra, sendo que no sistema todas as informações foram substituídas pelas características reais de cada um dos pilares e vigas.

Figura 08 – Matriz de rigidez da barra de pórtico espacial.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$
3	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0
4	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0
5	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0
6	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$
7	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0
8	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$
9	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0
10	0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
11	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0
12	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$

Fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p.183

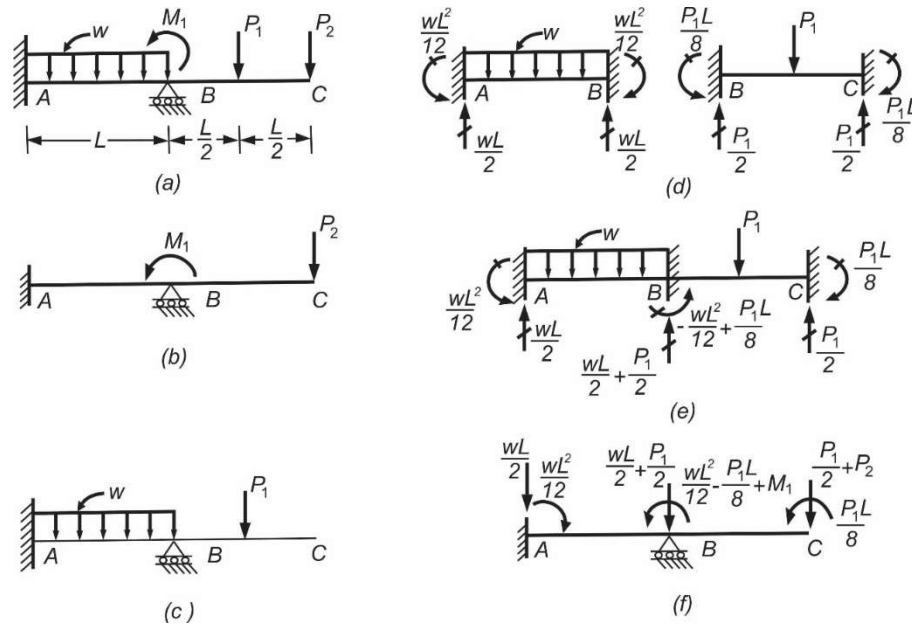
2.5 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Como o método utilizado para cálculo dos deslocamentos requer que todas as cargas estejam atuando especificando nos nós, e como as cargas reais não cumprem essa premissa, ocorre a necessidade de substituí-las por cargas equivalentes nodais, que após este procedimento são combinadas, gerando um valor de cargas nodais. Para (SORIANO, 2005, p. 116):

Quando ocorrem ações externas em barras de uma estrutura, os efeitos dessas ações precisam ser transformados em efeitos de forças nodais, pois, o método dos deslocamentos se baseia em um sistema de equações de equilíbrio segundo coordenadas nodais”

Como visualiza-se na Figura 09, as cargas nodais são separadas das outras ações, que posteriormente são convertidas em forças nodais equivalentes e combinadas.

Figura 09 – Cargas nodais combinadas.



Fonte: GERE; WEAVER JUNIOR, 1981, p.128

Inicialmente deve-se conhecer a estrutura e todos os seus carregamentos para transportar estas informações para o software. Na figura 02, visualiza-se a laje estabelecida para o pórtico, da qual se trata de uma unidirecional que transporta todo o seu peso para as vigas V1 e V2. Como o sistema analisa individualmente cada barra, o carregamento das vigas sobre os pilares não é lançado diretamente, pois essa informação será tratada internamente pela matriz.

Carregamento – Vigas V1 e V2:

Peso Próprio da laje (0,10m x (4,00m x 2,00m) / 4,00m x 25,00 kN/m³).....:	5,00 kN/m
Revestimento ((4,00m x 2,00m) / 4,00m x 0,70 kN/m³).....:	1,40 kN/m
Peso próprio da viga (0,20m x 0,40m x 25,00 kN/m³)	2,00 kN/m
Carga de utilização.....:	2,00 kN/m
Total	10,40 kN/m

Carregamento – Vigas V3 e V4:

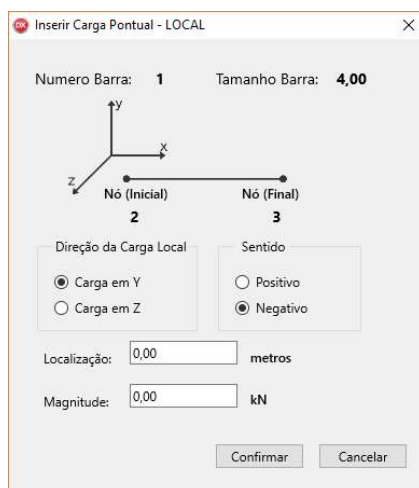
Peso próprio da viga (0,20m x 0,40m x 25,00 kN/m³)	2,00 kN/m
Total	2,00 kN/m

Carregamento – Pilares (P1, P2, P3 e P4)

Peso próprio do pilar (0,20m x 0,20m x 3,00m x 25,00 kN/m ³)	3,00 kN
Total	3,00 kN

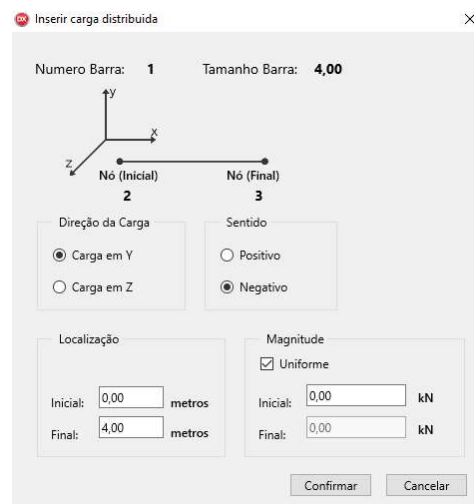
Todas os carregamentos foram lançados no sistema através da opção inserir carga pontual, Figura 10 e inserir cargas distribuídas, Figura 11, que cadastraram de forma local os lançamentos das forças, isto é, toda carga é aplicada como se a barra estivesse paralela ao eixo x e perpendicular aos eixos y e z.

Figura 10 – Inserção de cargas pontuais - LOCAIS Software UNI3D



Fonte: Do Autor, 2017

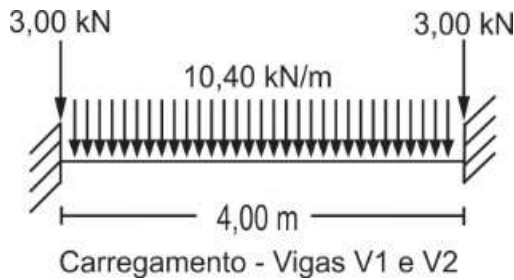
Figura 11 – Inserção de cargas distribuídas - LOCAIS Software UNI3D



Fonte: Do Autor, 2017

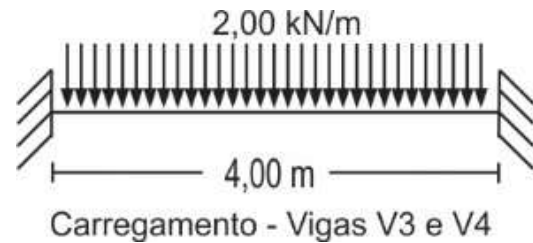
As vigas foram inseridas com carregamento distribuído uniforme, direção da carga em y, localização inicial 0 e final 4, no sentido negativo e magnitude de 10,40 kN/m, no caso das vigas V1 e V2 e magnitude de 2 kN/m, para as vigas V3 e V4. O lançamento do peso próprio dos pilares foi inserida através de uma força pontual na localização 0 e 4 das vigas V1 e V2, na direção y e sentido negativo, com a magnitude de 3 kN, representando desta forma a carga axial destes pilares. Na Figura 12 e 13, podemos visualizar as cargas resultantes das vigas.

Figura 12 – Cargas atuantes – Vigas V1 e V2



Fonte: Do Autor, 2017

Figura 13 – Cargas atuantes – Vigas V3 e V4



Fonte: Do Autor, 2017

Com a determinação de todos os carregamentos, o sistema se utilizou da fórmula do momento de engastamento perfeito e do somatório de forças para transformar toda carga atuante em equivalentes nodais, como pode ser visualizado na Figura 14 e 15.

Figura 14 – Cargas nodais atuantes – Vigas V1 e V2



Fonte: Do Autor, 2017

Figura 15 – Cargas nodais atuantes – Vigas V3 e V4

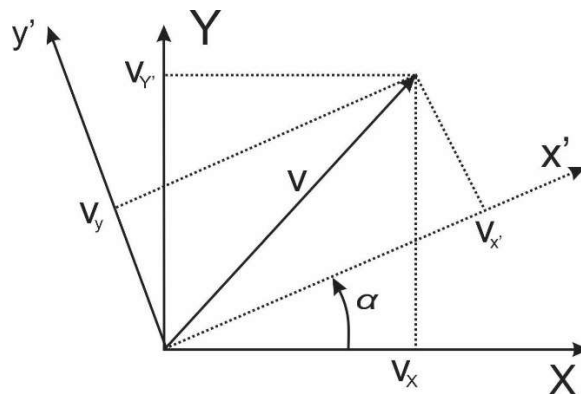


Fonte: Do Autor, 2017

2.6 MATRIZ DE ROTAÇÃO

A equação de rotação, ou matriz de rotação, é utilizada para transportar a matriz de rigidez da cada barra do plano local para o plano global, utilizando-se de sua localização no plano cartesiano.

Figura 16 – Rotação de eixos no plano



Fonte: SORIANO, 2005, p. 94

Com base na Figura 16 foi definida a Equação (2.4), onde $V_{x'}$, $V_{y'}$ são as projeções dos eixos V_x e V_y em relação ao ângulo α formado entre os eixos coordenados x e x' .

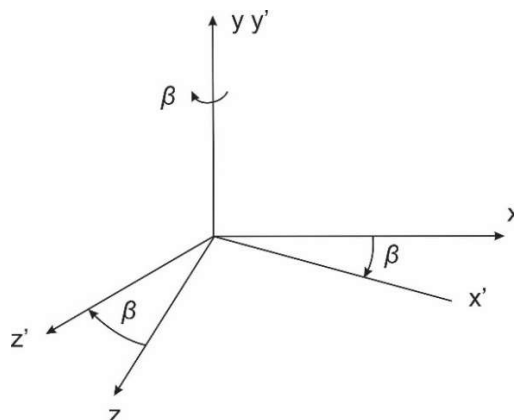
$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Através da Equação (2.4) obteve-se a matriz de rotação no plano (2.5):

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

O desenvolvimento da matriz de rotação no espaço tridimensional ocorre quando determinamos a matriz de rotação no plano do sistema de coordenadas x , y , z , e giramos os demais ângulos, sempre em relação a um eixo, como pode ser visualizado na Figura 17 onde ocorre a rotação dos eixos coordenados x' , y' e z' em torno de y .

Figura 17 – Rotação dos eixos coordenados x' , y' , z' em torno de y , y'



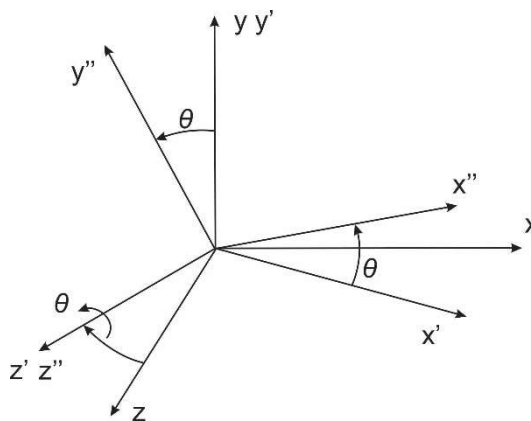
Fonte: KUMMER, 2014, p. 51

A Equação (2.6), representa as projeções $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ dos eixos V_x , V_y e V_z em relação a rotação dos eixos coordenados x' , y' e z' , em torno de y , visualizado na Figura 17, formando a matriz de rotação em y , definida na Equação (2.7)

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Figura 18 – Rotação dos eixos coordenados x' , y' , z' em torno de z' , z''



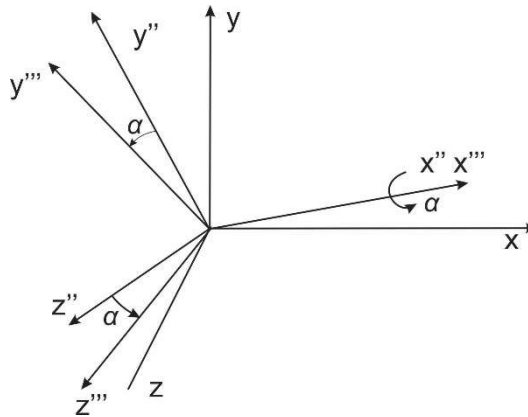
Fonte: KUMMER, 2014, p. 52

A Equação (2.8), representa as projeções $V_{x''}$, $V_{y''}$, $V_{z''}$ dos eixos $V_{x'}$, $V_{y'}$ e $V_{z'}$ em relação a rotação dos eixos coordenados x'' , y'' e z'' , em torno de z , visualizado na Figura 18, obtendo-se a matriz de rotação em z , definida na Equação (2.9)

$$\begin{bmatrix} V_{x''} \\ V_{y''} \\ V_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Figura 19 – Rotação dos eixos coordenados x', y', z' em torno de x'', x'''



Fonte: KUMMER, 2014, p. 53

A Equação (2.10), representa as projeções $V_{x'''}$, $V_{y'''}$, $V_{z'''}$ dos eixos $V_{x''}$, $V_{y''}$ e $V_{z''}$ em relação a rotação dos eixos coordenados x'' , y'' e z'' , em torno de x , visualizado na Figura 19, constituindo a matriz de rotação em x , definida na Equação (2.11)

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Após a definição das matrizes de rotação em relação a cada um dos eixos, determinou-se a matriz de rotação tridimensional, através do produto das matrizes R_y , R_z e R_x , conforme descrito na Equação (2.12), resultando a matriz R , identificada na Equação (2.13).

$$R = R_y \cdot R_z \cdot R_x \quad (2.12)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \theta & \sin \theta & \sin \beta \cos \theta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \theta & -\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \sin \theta - \cos \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.7 ANGULOS DA MATRIZ DE ROTAÇÃO

A obtenção dos ângulos de rotação foi determinada através de vários cálculos, utilizando-se das coordenadas globais de cada um dos nós da barra analisada. O software restringe na identificação da barra o lançamento incorreto da posição inicial e final dos eixos x, y e z, possibilitando que o sistema não gere resultados incorretos. O primeiro passo para determinar os ângulos ocorreu identificando o comprimento da barra, através da Equação (2.14):

$$L = \sqrt{(x_{inicial} - x_{final})^2 + (y_{inicial} - y_{final})^2 + (z_{inicial} - z_{final})^2} \quad (2.14)$$

Onde:

L = comprimento total da barra.

X_{inicial}, Y_{inicial}, Z_{inicial} = coordenada do nó inicial da barra.

X_{final}, Y_{final}, Z_{final} = coordenadas do nó final da barra.

Após a identificação de L, desenvolveu-se as equações do item (2.15) até o item (2.20), para obtenção dos ângulos da matriz de rotação.

$$C_1 = \frac{(x_{inicial} - x_{final})}{L} \quad (2.15)$$

$$C_2 = \frac{(y_{inicial} - y_{final})}{L} \quad (2.16)$$

$$C_3 = \frac{(z_{inicial} - z_{final})}{L} \quad (2.17)$$

$$\theta = \arcsin(C_2) \quad (2.18)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{C_1}{\sqrt{1 - C_2^2}}\right) \quad (2.19)$$

$$\alpha = \text{é medido entre } z'' \text{ e } z' \quad (2.20)$$

Utilizando-se da matriz de rotação R e dos ângulos β , θ e α , encontrou-se a matriz de rotação para as vigas V3 e V4 definida no item (2.21) e a matriz de rotação dos pilares, apresentada no item (2.22).

$$R_{3x3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

$$R_{3x3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

A partir da R_{3x3} , foi obtida a matriz de rotação R_{12x12} , onde os eixos centrais são representados pela R_{3x3} , conforme pode-se visualizar no item (2.23).

$$R_{12x12} = \begin{vmatrix} R_{3x3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{3x3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{3x3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{3x3} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

A matriz de rigidez de cada barra que não possuía as coordenadas globais paralelas ao eixo x e perpendiculares ao eixo y e z, necessitaram transportar seus valores para o sistema global, através da equação (2.24), gerando com isso a matriz de rigidez ajustada. Todos os pilares e as vigas V3 e V4, necessitaram ajustar os valores para o sistema global, conforme pode-se verificar na Figura 20 e 21. A matriz de rigidez das vigas V1 e V2, Figura 22, não tiveram seus valores alterados devida a rotação, pois atendiam as coordenadas globais.

$$S = (R_t^{-1} \cdot S^l) \cdot R_t \quad (2.24)$$

Onde:

S = Matriz de rigidez ajustada – sistema global;

R_t^{-1} = Inversa da matriz de rotação;

S^l = Matriz de rigidez da barra;

R_t = Matriz de rotação.

Após o ajuste de todas as matrizes de rigidez para o sistema global, estas foram unidas na matriz global, que através de sua ordenação formou a matriz de deslocamento e a matriz de reação da estrutura.

Figura 20 – Matriz de rigidez ajustada dos pilares P1, P2, P3 e P4

Matriz de Rigidez da Barra (Ajustada)

(X: 0,00 Y: 0,00 Z: 0,00) - BARRA 1 - (X: 0,00 Y: 3,00 Z: 0,00)

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
01	1,261E+03	1,730E-11	0	0	0	-1,892E+03	-1,261E+03	-1,730E-11	0	0	0	-1,892E+03
02	1,730E-11	2,838E+05	0	0	0	1,158E-13	-1,730E-11	-2,838E+05	0	0	0	1,158E-13
03	0	0	1,261E+03	1,892E+03	-1,158E-13	0	0	0	-1,261E+03	1,892E+03	-1,158E-13	0
04	0	0	1,892E+03	3,783E+03	-1,925E-13	0	0	0	-1,892E+03	1,892E+03	-1,550E-13	0
05	0	0	-1,158E-13	-1,925E-13	6,395E+02	0	0	0	1,158E-13	-1,550E-13	-6,395E+02	0
06	-1,892E+03	1,158E-13	0	0	0	3,783E+03	1,892E+03	-1,158E-13	0	0	0	1,892E+03
07	-1,261E+03	-1,730E-11	0	0	0	1,892E+03	1,261E+03	1,730E-11	0	0	0	1,892E+03
08	-1,730E-11	-2,838E+05	0	0	0	-1,158E-13	1,730E-11	2,838E+05	0	0	0	-1,158E-13
09	0	0	-1,261E+03	-1,892E+03	1,158E-13	0	0	0	1,261E+03	-1,892E+03	1,158E-13	0
10	0	0	1,892E+03	1,892E+03	-1,550E-13	0	0	0	-1,892E+03	3,783E+03	-1,925E-13	0
11	0	0	-1,158E-13	-1,550E-13	-6,395E+02	0	0	0	1,158E-13	-1,925E-13	6,395E+02	0
12	-1,892E+03	1,158E-13	0	0	0	1,892E+03	1,892E+03	-1,158E-13	0	0	0	3,783E+03

Fonte: Do Autor, 2017

Figura 21 – Matriz de rigidez ajustada das vigas V3 e V4

Matriz de Rigidez da Barra (Ajustada)

(X: 0,00 Y: 3,00 Z: 0,00) - BARRA 5 - (X: 0,00 Y: 3,00 Z: 4,00)

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
01	1,064E+03	0	2,600E-11	0	2,129E+03	0	-1,064E+03	0	-2,600E-11	0	2,129E+03	0
02	0	4,259E+03	0	-8,517E+03	0	5,215E-13	0	-4,259E+03	0	-8,517E+03	0	5,215E-13
03	2,600E-11	0	4,257E+05	0	-1,304E-13	0	-2,600E-11	0	-4,257E+05	0	-1,304E-13	0
04	0	-8,517E+03	0	2,271E+04	0	-1,295E-12	0	8,517E+03	0	1,136E+04	0	-7,908E-13
05	2,129E+03	0	-1,304E-13	0	5,677E+03	0	-2,129E+03	0	1,304E-13	0	2,839E+03	0
06	0	5,215E-13	0	-1,295E-12	0	1,559E+03	0	-5,215E-13	0	-7,908E-13	0	-1,559E+03
07	-1,064E+03	0	-2,600E-11	0	-2,129E+03	0	1,064E+03	0	2,600E-11	0	-2,129E+03	0
08	0	-4,259E+03	0	8,517E+03	0	-5,215E-13	0	4,259E+03	0	8,517E+03	0	-5,215E-13
09	-2,600E-11	0	-4,257E+05	0	1,304E-13	0	2,600E-11	0	4,257E+05	0	1,304E-13	0
10	0	-8,517E+03	0	1,136E+04	0	-7,908E-13	0	8,517E+03	0	2,271E+04	0	-1,295E-12
11	2,129E+03	0	-1,304E-13	0	2,839E+03	0	-2,129E+03	0	1,304E-13	0	5,677E+03	0
12	0	5,215E-13	0	-7,908E-13	0	-1,559E+03	0	-5,215E-13	0	-1,295E-12	0	1,559E+03

Fonte: Do Autor, 2017

Figura 22 – Matriz de rigidez das vigas V1 e V2.

Matriz de Rigidez da Barra (Ajustada)

(X: 0,00 Y: 3,00 Z: 0,00) - BARRA 6 - (X: 4,00 Y: 3,00 Z: 0,00)

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
01	4,257E+05	0	0	0	0	0	-4,257E+05	0	0	0	0	0
02	0	4,259E+03	0	0	0	8,517E+03	0	-4,259E+03	0	0	0	8,517E+03
03	0	0	1,064E+03	0	-2,129E+03	0	0	0	-1,064E+03	0	-2,129E+03	0
04	0	0	0	1,559E+03	0	0	0	0	0	-1,559E+03	0	0
05	0	0	-2,129E+03	0	5,677E+03	0	0	0	2,129E+03	0	2,839E+03	0
06	0	8,517E+03	0	0	0	2,271E+04	0	-8,517E+03	0	0	0	1,136E+04
07	-4,257E+05	0	0	0	0	0	4,257E+05	0	0	0	0	0
08	0	-4,259E+03	0	0	0	-8,517E+03	0	4,259E+03	0	0	0	-8,517E+03
09	0	0	-1,064E+03	0	2,129E+03	0	0	0	1,064E+03	0	2,129E+03	0
10	0	0	0	-1,559E+03	0	0	0	0	0	1,559E+03	0	0
11	0	0	-2,129E+03	0	2,839E+03	0	0	0	2,129E+03	0	5,677E+03	0
12	0	8,517E+03	0	0	0	1,136E+04	0	-8,517E+03	0	0	0	2,271E+04

Fonte: Do Autor, 2017

Os deslocamentos nodais foram determinados através da Equação (2.25) enquanto as reações de apoio resultaram da Equação (2.26)

$$D = (M_D^{-1} \cdot F_N) \quad (2.24)$$

Onde:

D = Vetor de deslocamentos;

M_D^{-1} = Inversa da matriz de deslocamento;

F_N = Forças nodais.

$$R_A = (M_R \cdot D) \quad (2.25)$$

Onde:

R_A = Vetor de reações de apoio;

M_R = Matriz de reação;

D = Vetor de deslocamentos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para confirmar o funcionamento do software UNI3D, várias estruturas foram testadas e comparadas passo a passo, utilizando de recursos como o software de planilhas eletrônicas - Excel e o programa educacional PORTICO3D, desenvolvido por Mauricio

Guerra, atual professor de engenharia da Universidade Comunitária Regional de Chapecó – UNOCHAPECÓ (GUERRA, 2009), que auxiliaram na visualização de todas as etapas do método da rigidez. Para analisar os resultados obtidos, utilizou-se como comparativo, o software para análise estrutural por elementos finitos - SAP2000, de uso comercial e o software educacional PORTICO3D. Todos eles receberam a mesma estrutura identificada na figura 02, com as configurações de material obtidas na Equação (2.3) e as seções das vigas e pilares descritos na tabela 01. Quanto aos carregamentos o SAP2000, já calcula o peso próprio de cada elemento, não sendo necessário adicionar o carregamento de 2,00 kN/m nas vigas V1, V2, V3 e V4 e nem a força pontual de 3,00 kN, para simular o peso próprio dos pilares.

3.1 REAÇÕES DE APOIO

Com o objetivo de analisar e comparar os resultados obtidos pelos três softwares, para que assim pudesse validar a precisão de suas respostas, foi efetuado a análise estatística de variância – ANOVA, que possibilita a verificação de diferenças significativas entre os resultados obtidos.

De acordo com a tabela 04, os resultados demonstram que os valores são estatisticamente iguais, pois seu fator F, possui valor muito inferior ao F crítico, gerando com isso uma garantia de 95% da não existência de diferenças significativas entre os programas.

Tabela 04 – ANOVA – Reações de apoio.

RESUMO

<i>Grupo</i>	<i>Contagem</i>	<i>Soma</i>	<i>Média</i>	<i>Variância</i>
UNI3D	6	28,468	4,744667	128,7952819
PORTICO3D	6	28,468	4,744667	128,7952819
SAP2000	6	28,47	4,745	128,75635

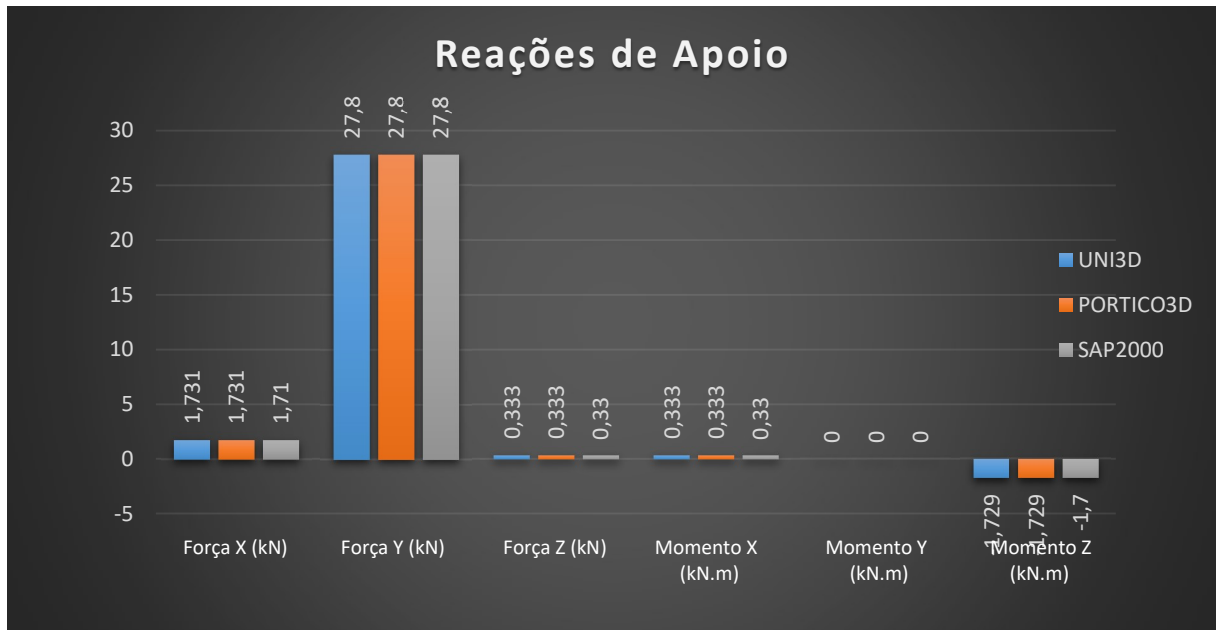
ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	4,44E-07	2	2,22E-07	1,72557E-09	1	3,68232
Dentro dos grupos	1931,735	15	128,7823			
Total	1931,735	17				

Fonte: Do Autor, 2017

Na Figura 23 é possível visualizar graficamente o comparativo entre as reações de apoio fornecidas pelos softwares.

Figura 23 – Gráfico comparativo das reações de apoio



Fonte: Do Autor, 2017

3.1 DESLOCAMENTOS NODAIS

O mesmo procedimento de análise estatística utilizado para as reações de apoio foi efetuado sobre os deslocamentos nodais, que de acordo com a tabela 05, resultaram também em um fator F inferior ao F crítico, constatando que não existem diferenças significativas entre os sistemas. Na Figura 24 são apresentados os deslocamentos nodais de forma gráfica, possibilitando uma melhor visualização comparativa de suas resultantes. Entre os valores resultantes a maior diferença ocorreu em relação a translação em x, obtida pelo SAP2000, que chegou a um valor de 5,7% superior ao encontrado pelo UNI3D. Devido a resultante do software PORTICO3D, também apresentar uma diferença maior nesta mesma translação, chegando a um valor 5,36% superior, não se pode alegar que este valor ocorreu devido a diferença de métodos utilizados.

Tabela 05 – ANOVA – Deslocamentos nodais.

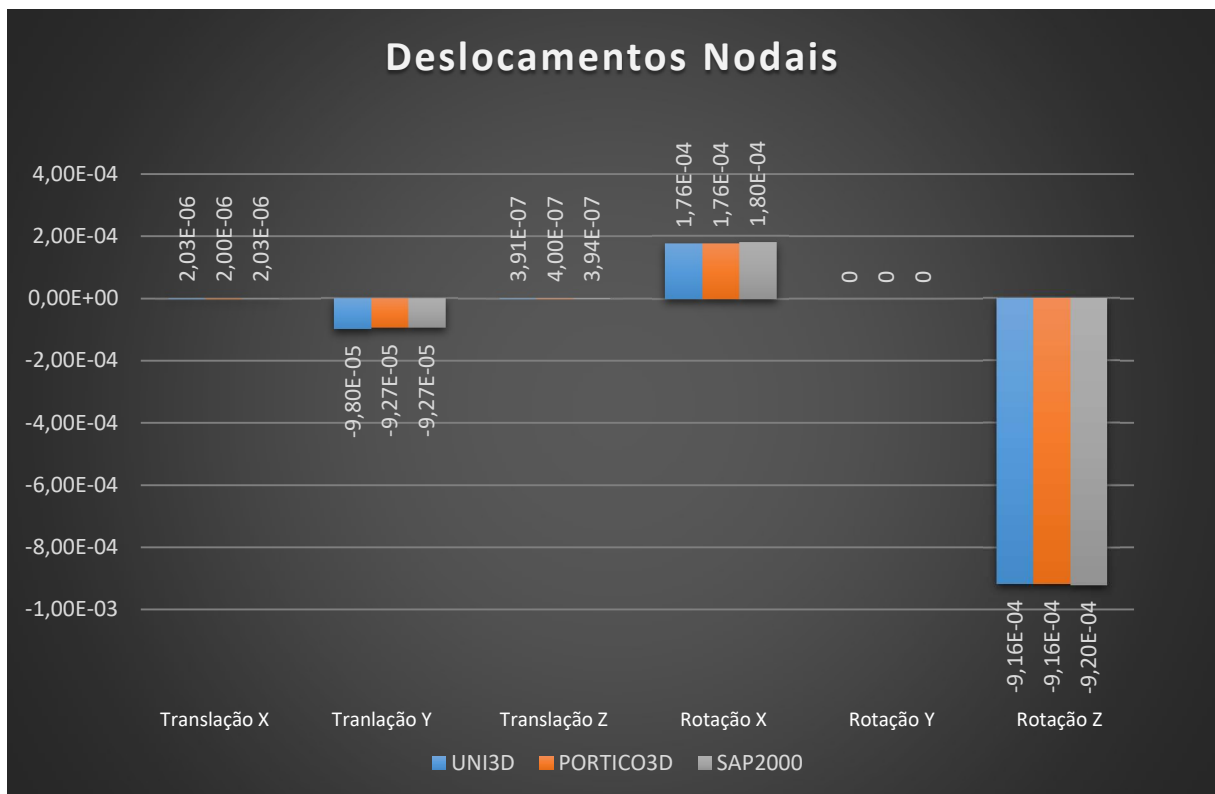
RESUMO

Grupo	Contagem	Soma	Média	Variância
UNI3D	6	-0,0008354	-0,00014	1,52712E-07
PORTICO3D	6	-0,0008302	-0,00014	1,52802E-07
SAP2000	6	-0,0008302	-0,00014	1,54502E-07

ANOVA

Fonte da variação	SQ	gl	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	3,01E-12	2	1,51E-12	9,81628E-06	0,99999	3,68232
Dentro dos grupos	2,3E-06	15	1,53E-07			
Total	2,3E-06	17				

Figura 24 – Gráfico comparativo dos deslocamentos nodais.



Fonte: Do Autor, 2017

4. CONCLUSÃO

Como o intuito do software UNI3D, é calcular pórticos espaciais de forma didática, ele permite que facilmente se faça o lançamento de qualquer estrutura, possibilitando que o usuário analise incontáveis situações, simulando carregamentos, força do vento, peso dos materiais, distribuição das lajes, entre tantas outras opções. Além disso ele fornecendo ao usuário, seja ele, aluno, professor ou até mesmo profissional da área, fácil acesso aos resultados do sistema, como os deslocamentos, reações de apoio, entre tantas outras opções, sem precisar de softwares robustos que necessitam de horas de aprendizado e de grande conhecimento da engenharia.

Como pode-se observar nas análises dos resultados, este software tem plena capacidade de calcular o pórtico espacial apresentado, chegando a valores com precisão igual ao dos softwares comerciais. Além das resultantes analisadas, o sistema também oferece alternativas para que se possa acompanhar passo a passo as etapas compostas pelo método da rigidez, pois exibe de cada barra a sua matriz de rigidez, matriz de rotação, inversa da matriz de rotação, matriz de rigidez ajustada, esforços nodais causados pelos carregamentos e também o acompanhamento global da estrutura, com a visualização da matriz global alinhada, matriz de deslocamento, inversa da matriz de deslocamento, matriz de reações, deslocamentos das barras e por fim as reações em cada nó.

Com os resultados obtidos, pode-se concluir que o software UNI3D consegue atender todos os objetivos para o que foi projetado, servindo como ferramenta educacional para fortalecer o aprendizado dos alunos de engenharia civil.

5. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Verificar o funcionamento do software em relação a outros tipos de estruturas (treliças, grelhas, etc).

Desenvolver algoritmo para o método dos elementos finitos e comparar o resultado entre os dois sistemas.

Inclusão das normas e desenvolvimento do cálculo e detalhamento de vigas e pilares, possibilitando que o sistema exiba relatórios de verificação da estrutura.

6. REFERÊNCIAS

BEER, Ferdinand P. ; JHONSTON JR, E. Russel; DEWOLF, John T.; MAZUREK, David F. **Mecânica dos Materiais**. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2011.

LEÃO, Marcelo. **Borland Delphi 6 & Kylix Curso Completo**. Rio de Janeiro: Axcel Books do Brasil Editora. 2001.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora., 2010.

GERE, James M.; WEAVER JR., William. **Análise de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

SANCHO, Juana M.; HERNÁNDEZ, F. **Tecnologias para a transformar a educação**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SORIANO, Humberto Lima; LIMA, Silvio de Souza. **Análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2004.

SORIANO, Humberto Lima. **Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2005.

VENANCIO FILHO, Fernando. **Análise matricial de estruturas: estática, estabilidade, dinâmica**. Rio de Janeiro: A. Neves, 1975.

KUMMER, Fabricio Deives. **Análise de Pórticos Espaciais pelo Método da Rigidez: Consideração dos efeitos da deformação por corte**. Porto Alegre: 2014. 103 p., Trabalho de Diplomação em Engenharia Civil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

GUERRA, Maurício. **Desenvolvimento de um Software para Análise de Pórticos Espaciais Utilizando o Método da Rigidez**. Chapecó: 2009. 92 p., Trabalho de Diplomação em Engenharia Civil. Universidade Comunitária Regional de Chapecó.